

MatF Formelsamling

Vektoranalyse

Gradienten

Kartetisk:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\hat{k} \quad (1)$$

Polær:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\hat{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\hat{i}_\theta \quad (2)$$

Sfærisk

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\hat{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\hat{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\hat{i}_\varphi \quad (3)$$

Gradienten af en vektor

$$\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \quad (4)$$

Divergens

Kartetisk:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (5)$$

Polær:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} \quad (6)$$

Sfærisk

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) \quad (7)$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \quad (8)$$

Rotation

Kartetisk:

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad (9)$$

Sfærisk:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = & \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} \right) \hat{i}_r \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right) \hat{i}_\varphi \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) \right) \hat{i}_\theta \end{aligned} \quad (10)$$

Cylindrisk:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{i}_r & r\hat{i}_\varphi & \hat{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix} \quad (11)$$

Laplace

Kartetisk:

$$\nabla^2\beta = \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} \quad (12)$$

Sfærisk:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \\ & + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Polær (planar):

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \quad (14)$$

Transformation fra kartetisk til polær

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \cos\theta\hat{i}_r - \sin\theta\hat{i}_\theta \\ \hat{j} &= \sin\theta\hat{i}_r + \cos\theta\hat{i}_\theta \end{aligned} \quad (15)$$

Andre differentialoperatorer

Partikelafledte:

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla\vec{v}) \quad (16)$$

Begreber:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} = 0 &\rightarrow \text{divergensfrit} \\ \nabla \times \vec{v} = 0 &\rightarrow \text{rotationsfrit}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla \beta = \vec{v}) \wedge (\nabla^2 \beta = 0) \\ \rightarrow (\nabla \cdot \vec{v} = 0) \wedge (\nabla \times \vec{v} = 0)\end{aligned}\quad (17)$$

Skalarpotential og Strømfunktionen:

Strømfunktionen findes når feltet er divergensfrit:

$$(\nabla \cdot \vec{v} = 0) \rightarrow \exists \psi : \left(v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \wedge \left(v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (18)$$

I polære koordinater gælder

$$(\nabla \cdot \vec{v} = 0) \rightarrow \exists \psi : \left(v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \wedge \left(v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (19)$$

Potentialet findes når feltet er rotationsfrit:

$$\rightarrow \exists \varphi : \nabla \varphi = \vec{v} \quad (20)$$

Den er givet som

$$(\nabla \times \vec{v} = 0) \rightarrow \exists \varphi : \left(v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \wedge \left(v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (21)$$

I polære koordinater

$$(\nabla \times \vec{v} = 0) \rightarrow \exists \varphi : \left(v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \wedge \left(v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (22)$$

Divergensen er ikke lige med nul Men vi kan finde strømlinjerne alligevel. Langs en del $d\vec{r}$ af en strømlinje, vil

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \quad (23)$$

fordi $\vec{v} \parallel d\vec{r}$, så der gælder

$$v_x dy = v_y dx \quad (24)$$

Dipolfeltet:

For Dipolfeltet gælder Laplace-ligningen.

Strømfunktionen:

$$\psi = \frac{Ax}{x^2 + y^2} = \frac{A \sin \theta}{r} \quad (25)$$

Potentialet:

$$\varphi = \frac{Ay}{x^2 + y^2} = \frac{A \cos \theta}{r} \quad (26)$$

Hvor A er en konstant.

Kilde/Dræn i origo

Potentialet:

$$\varphi = A \ln r \quad (27)$$

Strømfunktion

$$\psi = -A\theta \quad (28)$$

Punktvirvel med centrum i origo

Potentialet:

$$\varphi = A\theta \quad (29)$$

Strømfunktion

$$\psi = A \ln r \quad (30)$$

Stoke's og Green's Sætning: Green's sats gælder i planet, og Stoke's sats er den 3D generalisering af Green's sats.

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (31)$$

Gauss' Sætning (divergensteoremet):

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{v} d\tau = \int_{\sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (32)$$

Gauss' Sætning for gradient og virvlingsvektoren:

$$\begin{aligned}\int_{\tau} \nabla \times \vec{v} d\tau &= - \int_{\sigma} \vec{v} \times \vec{n} d\sigma \\ \int_{\tau} \nabla \beta d\tau &= \int_{\sigma} \beta \vec{n} d\sigma\end{aligned}\quad (33)$$

Vektorflux/Volumenstrøm:

$$Q = \int_{\sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (34)$$

Strøm mellem to punkter, p og q , (gennem et rør):

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (35)$$

Cirkulation:

$$C = \oint_{\lambda} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (36)$$

Nogen andre ting:

$$d\vec{r} = dv_x \hat{i}_x + dv_y \hat{i}_y + dv_z \hat{i}_z = dv_r \hat{i}_r + dv_{\theta} \hat{i}_{\theta} \quad (37)$$

Massestrøm per tidsenhed gennem en flade σ :

$$M = \int_{\sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \rho Q \quad (38)$$

Massebevarlse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (39)$$

Euler ligningen (bevægelsesligning for friktionsfri strøm):

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \quad (40)$$

Bernoullis Ligning:

$$\mathcal{H} = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v}^2 + gz = \mathcal{H}_0 \quad (41)$$

Rød Bog

Indre Produkt:

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x)dx \quad (42)$$

Hvor a og b er grænserne for dit specifik indre produkt, og $\rho(x)$ er en vægtfunktion (tit er den bare lige med 1.).

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle} \quad (43)$$

* $\Delta\omega$ er den såkaldte "frekvenskvant".

Hilbertrum: Hilbertrummet er et vektorrum bestående af funktioner. Hermiteske differentialoperatorer har reelle egenverdier, og dens tilsvarende egenfunktioner er en basis for Hilbertrummet.

Fourier Rækker (\mathbb{R}):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r \cos\left(\frac{2\pi r x}{T}\right) + b_r \sin\left(\frac{2\pi r x}{T}\right) \right) \quad (44)$$

Hvor

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{T}\right) dx, \quad r \in \mathbb{N} \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx \\ b_r &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin\left(\frac{2\pi r x}{T}\right) dx, \quad r \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (45)$$

Fourier Rækker (\mathbb{C}):

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{\frac{2\pi i x r}{T}} \quad (46)$$

Hvor $c_r \in \mathbb{C}$ er:

$$c_r = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i x r}{T}} dx \quad (47)$$

Fourier Transformation: Når $T \rightarrow \infty$ i Fourier rækken, så $\Delta\omega \rightarrow 0^*$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (48)$$

$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$
$\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\tau\omega)^2}{2}}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t-b)$	$e^{-ib\omega}\tilde{f}(\omega)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$\tilde{f}(\omega+i\alpha)$
$f'(t)$	$i\omega\tilde{f}(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2\tilde{f}(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\tilde{f}(\omega)$
$\int^t f(u)du$	$\frac{1}{i\omega}\tilde{f}(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$\sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(\omega) * \tilde{g}(\omega)$

Table 1: Nogen Fourier transformationer

Foldning:

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx \quad (49)$$

Dirac δ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a)$$

$$\delta(t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)}d\omega \quad (50)$$

Partielle Differentialligninger:

Sturm-Liouville ligninger:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + r(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad (51)$$

Førsteordens homogen PDE (i planet) (EMM393-395):

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

Antag $u(x,y) = f(p)$, så bliver ligningen

$$A(x,y)\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (53)$$

Så er p givet ved:

$$p = \int \frac{dx}{A(x,y)} + f(y) = - \int \frac{dy}{B(x,y)} + g(x) \quad (54)$$

Hvis din PDE er inhomogen på følgende form

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x,y)u \quad (55)$$

Så ganger du bare din homogen løsning med en funktion $h(x,y)$ som opfylder

$$A(x,y)\frac{\partial h}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial h}{\partial y} = C(x,y)h \quad (56)$$

(og opfylder dine randbetingelser) for at få den inhomogen løsning.

Andengrads homogen PDE:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (57)$$

Hvor A, B og C er konstanter.

Først skal der bestemmes hvilken slags ligning det er

$B^2 - 4AC > 0$	Hyperbolsk
$B^2 - 4AC < 0$	Elliptisk
$B^2 - 4AC = 0$	Parabolsk

Hvis differentiaalligningen *ikke* er parabolsk, dvs den er **elliptisk** eller **hyperbolsk** så er løsningen givet som

$$f(x + \lambda_1 y) + g(x + \lambda_2 y) \quad (58)$$

hvor $\lambda_{1,2}$ er løsningerne til $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$

Hvis $\lambda_1 = \lambda_2$, dvs at differentiaalligningen er **parabolsk**, så er løsningen givet som

$$f(x + \lambda y) + xg(x + \lambda y) \quad (59)$$

Laplaceligningen:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (60)$$

Løsningen i 2D er givet som

$$f(x + iy) + g(x - iy) \quad (61)$$

Bølgeligningen:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (62)$$

Den generelle løsning (EMM407) er

$$u(x, y, z, t) = f(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct) + g(\hat{n} \cdot \vec{r} + ct) \quad (63)$$

Hvor \hat{n} er en vilkårlig enhedsvektor. I 1D svarer dette til

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (64)$$

Diffusionsligningen:

$$\kappa \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (65)$$

Løsningen er meget grim og består af erf. (Side 409-410 og 414)

Superpositionsprincippet:

Hvis $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er løsninger til en differentialligning, så er $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ også en løsning til differentialligningen, $\forall \alpha \in \mathbb{F} \forall \beta \in \mathbb{F}$

Parametrisering

For PDE kan man bruge parametrisering til at finde løsninger til ligningen, for PDE'er gælder nemlig at det er argumentet til funktionen, og ikke selve funktionen der løser ligningen. Dvs. når du har fundet en funktion, f , som opfylder ligningen, så er hver sammensat funktion $g \circ f$ også en løsning.

Separation af variable

$u = u(\vec{r}, t)$. \mathcal{L} er en partiel differentialoperator.

1. Antag u kan skrives som en produkt af funktioner af en variabel - én for hver uafhængig variabel, f.eks $u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ i kartesiske koordinater.
2. Skriv $\mathcal{L}(u)$ ud
3. Dividér $\mathcal{L}(u)$ med u .
4. Nu er hvert led en funktion af en variabel, som vil sige at alle led er konstante (for at ligningen er opfyldt)
5. Definér separationskonstanterne (tit λ^2 eller $-\lambda^2$ eller lignende, at man selv kan bestemme fortegnet)
6. Nu har du et par ODE, som burde være nemme at løse.
7. Produktet af løsningerne er u .

Alle de der underlige sinus og cosinus ting:

Der er mere på side 49 i SCHAUMS

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta \pm \varphi) &= \sin(\theta) \cos(\varphi) \pm \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta \pm \varphi) &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \mp \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi) &= 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ \cos(2\varphi) &= 1 - 2 \sin^2(\varphi) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned} \quad (69)$$