Cauchy-Riemann betingelser

Lad $z = x + iy$ og

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

Funktionen er analytisk hvis følgende betingelser er opfyldt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right) \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2}$$

Singulariteter

Hævelig	$\lim_{z\to z_0} f(z)$ eksisterer og er endelig.
n. ordens pol	$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
Essentiel	Singulariteten er hverken hævelig eller en pol.
I uendelig	$f(z)$ har en singularitet i uendelig hvis $f(z^{-1})$ har en singularitet i 0

Forgreningspunkter:

Et forgreningspunkt er et punkt hvor en flertydig funktion ikke kan gøres entydig på en omegn omkring punktet. Det er altså punktet man ikke må lave et lukket konturintegral omkring uden at vælge en gren, f.eks. origo for $\log z$.

Laurent-række:

Lad $f(z)$ være analytisk, bortset fra en pol af endelig orden, n, i punktet z_0, så kan man skrive

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \tag{3}$$

hvor $g(z)$ er analytisk. Så laver man en Taylor-udvikling af $g(z)$ omkring punktet $z = z_0$. Dvs. funktionen kan skrives

$$f(z) = \sum_{\rho=-n}^{\infty} a_\rho (z - z_0)^\rho \tag{4}$$

Geometrisk række:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ for } |x| < 1 \tag{5}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \text{ for } |x| < 1 \tag{6}$$

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} \text{ for } |x| > 1 \tag{7}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^{-n} \text{ for } |x| > 1 \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Taylor-udviklinger

Funktion	Taylor-udvikling
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m} \tag{10}$$

Hvor

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{11}$$

Konvergens af rækker

Lad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{12}$$

Man definerer konvergensradiussen, R, til at være

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \tag{13}$$

Hvis grænsen eksisterer, kan man også bruge $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. $f^{(n)}(z)$ har den samme konvergensradius som $f(z)$

Rodkriteriet for konvergens:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \tag{14}$$

Kvotientkriteriet for konvergens:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \tag{15}$$

Flertydige funktioner:

En flertydig funktion er ikke en egentlig funktion, før man vælger en gren. Sagt på en anden måde, antag $f : U \to W$, og lad $V = \mathrm{Im}(f)$. For en entydig funktion gælder at

$$\forall(x \in U)\exists!(y \in V) : f(x) = y \tag{16}$$

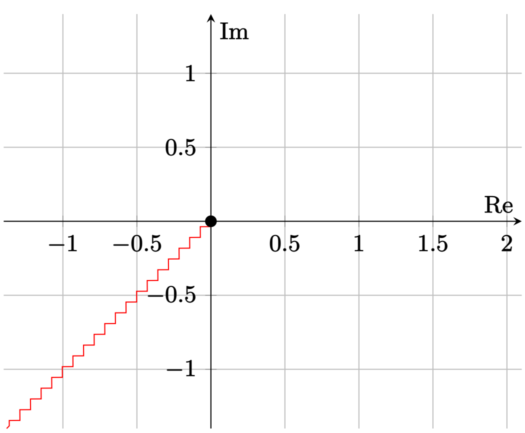
Et eksempel på en flertydig funktion er logaritmefunktionen $\log(z)$. For at vise det, lad $z = re^{i\theta}$, og lad $\theta \to \theta + 2\pi$:

$$\log\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta \tag{17}$$

$$\log\left(re^{i(\theta+2\pi)}\right) = \ln r + i(\theta + 2\pi) \tag{18}$$

Integraler med forgreningspunkter:

Når ens integrand* er en flertydig funktion, skal man vælge en gren og undgå at krydse grenskæringen. F.eks. kan man for $\log z$ lave følgende opskæring af det komplekse plan (se figuren nedenfor). Det er vigtigt at huske at der findes uendelig mange valg af grene, og der er ikke nogen der er 'mere' rigtige end andre.



Residuesætningen:

* i et konturintegral

Lad $f(z)$ være analytisk på og inden for den lukkede kurve γ, bortset fra et endeligt antal poler i området omsluttet af γ. Da gælder at

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i) \tag{19}$$

Residuum af funktionen $f(z)$ i en n-te ordens pol, i punktet z_0, er givet ved:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z)\right) \tag{20}$$

For en simpel pol bliver det bare

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \left((z - z_0) f(z)\right) \tag{21}$$

Substitution som tit bruges:

$$\begin{gathered} z = e^{i\theta} \\ \therefore \mathrm{d}\theta = -iz^{-1}\mathrm{d}z \end{gathered} \tag{22}$$

Fourier-transformation:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{23}$$

Invers Fourier-transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\tilde{f}(\omega)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{24}$$

Laplace-transformation:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{25}$$

Invers Laplace-transformation:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \bar{f}(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{26}$$

Laplace og Fourier transformationer:

Funktion	$\mathcal{F}$	$\mathcal{L}$
$f(at),\, a > 0$	$a^{-1}\tilde{f}(\omega a^{-1})$	$a^{-1}\bar{f}(sa^{-1})$
$f(t-b)$	$e^{-ib\omega}\tilde{f}(\omega)$	–
$f(t-b)H(t-b)$	–	$e^{-bs}\bar{f}(s)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$\tilde{f}(\omega + i\alpha)$	$\bar{f}(s-\alpha)$
$f'(t)$	$i\omega\tilde{f}(\omega)$	$s\bar{f}(s) - f(0)$
$f''(t)$	$-\omega^2\tilde{f}(\omega)$	$s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\tilde{f}(\omega)$	$s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0)$ $-s^{n-2}f'(0) - \cdots$ $-f^{(n-1)}(0)$
$\int^t f(u)\mathrm{d}u$	$\frac{1}{i\omega}\tilde{f}(\omega) + \sqrt{2\pi}c\delta(\omega)$	$\frac{1}{s}\bar{f}(s)$
$f(t) * g(t)$	$\sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$	$\bar{f}(s)\bar{g}(s)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(\omega) * \tilde{g}(\omega)$	–

Dirac Delta:

$$\delta(t-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)}\mathrm{d}\omega \tag{27}$$

Når man har δ i integranden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-u)\mathrm{d}t = f(u) \tag{28}$$

Og mere generelt gælder at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-u)\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(u) \tag{29}$$

Legendre Polynomer:

$$P_0 = 1 \tag{30}$$
$$P_1 = x \tag{31}$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \tag{32}$$
$$P_3 = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \tag{33}$$
$$P_4 = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) \tag{34}$$
$$P_5 = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right) \tag{35}$$